Existence de deux solutions du type front progressif pour un modèle de combustion avec pertes de chaleur

Existence of two travelling wave solutions for a combustion model with heat losses

Lionel Roques

Université Aix-Marseille III, LATP, Avenue Esc. Normandie-Niemen, F-13397 Marseille Cedex 20, France

Résumé

Cette Note a pour objet l'étude de l'existence de flammes planes dans le cas d'une chimie simple, mais avec pertes de chaleur intervenant sous forme volumétrique. Nous prouvons l'existence de deux solutions distinctes pour des petites valeurs du paramètre de pertes et donnons des bornes pour le terme de pertes ainsi que pour la vitesse de réaction.

*Pour citer cet article : L. Roques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ****

Abstract

This Note deals with the existence of planar flames, in the case of a single-step chemical reaction with volumetric heat losses. We prove the existence of two distinct solutions, for small values of the heat loss rate parameter. We also give upper bounds for the flame speed and for the heat loss rate parameter.

*To cite this article: L. Roques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ****

Abridged English version

This Note is concerned with the reaction-diffusion system modelling the propagation of a premixed laminar flame with heat losses.

Let Λ and λ be two positive real numbers. The aim of this work is to prove existence and nonexistence results for the following problem:

Email address: `lionel.roques@univ.u-3mrs.fr` (Lionel Roques).

finding two nonnegative classical functions u and v and a nonnegative real number c which satisfy

$$\begin{cases} \ \ -u'' + cu' = f(u,v) - \lambda h(u) \\ -\Lambda v'' + cv' = -f(u,v) \end{cases} \text{on } \mathbb{R}, \text{ with } \begin{cases} u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 0, \\ v(-\infty) = 1,\ v'(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

We assume that there exist a nondecreasing Lipschitz continuous function p and an increasing continuous function g such that

$$\begin{cases} f(u,v) = p(u)g(v) \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ \exists\ \theta\ \in\ (0,1) \text{ s.t. } p(x) = 0 \text{ for all } x \le \theta \text{ and } p(x) > 0 \text{ for all } x > \theta, \\ g(0) = 0 \text{ and } \forall\ \gamma > 0,\ 0 < \min\left\{ \inf\limits_{s\in(0,1)} \dfrac{g(\gamma s)}{g(s)}, \gamma \right\} \le \max\left\{ \sup\limits_{s\in(0,1)} \dfrac{g(\gamma s)}{g(s)}, \gamma \right\} < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

The last hypothesis is for instance satisfied by functions g of the type $g(y) = y^n$, with $n > 0$. It also works with functions g such that it exists $n \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$ such that $g \in C^n(\mathbb{R})$, $g^{(n)}(0) \neq 0$, where $g^{(n)}$ is the n^{th} derivative of g.

The function h is supposed to be in $C^1(\mathbb{R})$, strictly increasing. Moreover, it satisfies

$$h(0) = 0,\ \ h(1) = 1, \exists\ \alpha,\ \ \beta\ \in\ \mathbb{R} \text{ s.t. } 0 < \alpha \le h' \le \beta. \tag{3}$$

Let (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) be the solutions of (1) with $\lambda = 0$, and with the following boundary conditions : $u(-\infty) = 0$, $u(+\infty) = 1$, $v(-\infty) = 1$ and $v(+\infty) = 0$ (see [2] for the existence of such solutions and [3], [6] for uniqueness and non-uniqueness results).

Under this hypothesis, we have the following results:

Theorem 0.1 *1) For all $\Lambda > 0$, if λ is sufficiently small, there exist two distinct and nontrivial solutions (u_1, v_1, c_1) and (u_2, v_2, c_2) of the problem (1), with $c_1 < c_2$. Moreover, v_i $(i = 1, 2)$ is nonincreasing.*

2) For all $\Lambda > 0$, $c_1 \to 0$ as $\lambda \to 0$. Moreover, if we assume that $\Lambda \le 1$ and $g(y) = y$ on $\mathbb{R}$, (u_2, v_2, c_2) converges locally uniformly to (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}), the unique solution of the adiabatic problem associated to (1) , as $\lambda \to 0$. The same result holds in the case $\Lambda = 1$, for the more general reaction term $f(x, y)$.

The next Theorem gives new bounds for every solution (u, v, c) of (1).

Theorem 0.2 *1) If $\lambda > \dfrac{f(1,1)}{h(\theta)}$, the problem (1) has got no solution.*

2) Assume that g is globally Lipschitz continuous with constant K, then for all nontrivial solution (u, v, c) of (1), $v(+\infty) > exp\left(-\dfrac{Kp(1)}{\lambda h(\theta)}\right)$.

3) Let (u, v, c) be a solution of (1), and (u_s, c_s) be the unique solution (see [2]) of $-\Lambda u_s'' + c_s u_s' = f(u_s, 1 - u_s)$ with $u_s(-\infty) = 0$, $u_s(+\infty) = 1$. Then, for all $\Lambda \ge 1$, $0 < c \le c_s$.

4) Let (u, v, c) be a solution of (1), and set $\sigma_1 = \max\limits_{s\in(\theta,1)} \dfrac{f(s, 1-s)}{s}$ and $\sigma_2 = \max\limits_{s\in[0,1]} f(1 - \underline{\Lambda} s, s)$, then $0 < c < 2\sqrt{\sigma_1 \Lambda}$ for all $\Lambda \ge 1$ and $0 < c < \sqrt{\dfrac{\sigma_2}{\theta}}$ for all $\Lambda > 0$.

1. Introduction

Cette Note concerne l'existence de solutions du type front progressif pour un modèle de combustion. Rappelons que les problèmes de flammes planes se propageant dans des gaz prémélangés sont décrits par des systèmes d'équations de réaction-diffusion non-linéaires couplées. La plupart des aspects de la propagation de flammes peuvent être étudiés dans le cas du modèle simplifié unidimensionnel d'une réaction chimique exothermique non-réversible du type $A \to B$. Dans ce cas, le problème associé se réduit à un système de deux équations de réaction-diffusion couplées, où les inconnues sont i) la température u du mélange, ii) la concentration v en réactant et iii) la vitesse c de la flamme.

Nous nous intéressons au cas avec pertes de chaleur ; le système de réaction-diffusion associé est alors

$$\begin{cases} -u'' + cu' = f(u,v) - \lambda h(u) \\ -\Lambda v'' + cv' = -f(u,v) \end{cases} \text{sur } \mathbb{R}, \tag{4}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(-\infty) = 0, \ u(+\infty) = 0, \\ v(-\infty) = 1, \ v'(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Les hypothèses sur la non-linéarité f sont les suivantes : il existe deux fonctions p et g telles que

$$f(u,v) = p(u)g(v) \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{6}$$

où la fonction p est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, croissante, et admet une température d'ignition θ :

$$\exists\ \theta \ \in\ ]0,1[\text{ tel que } p(x) = 0 \text{ si } x \leq \theta \text{ et } p(x) > 0 \text{ si } x > \theta, \tag{7}$$

et la fonction g est continue, strictement croissante et telle que

$$g(0) = 0 \text{ et } \forall\ \gamma > 0,\ 0 < \min\left\{ \inf_{s\in]0,1[} \frac{g(\gamma s)}{g(s)}, \gamma \right\} \leq \max\left\{ \sup_{s\in]0,1[} \frac{g(\gamma s)}{g(s)}, \gamma \right\} < +\infty. \tag{8}$$

L'hypothèse (8) est par exemple vérifiée pour des fonctions du type $g(y) = y^n$, avec $n > 0$, ou encore pour des fonctions g, n fois dérivables, et telles que la n^{ieme} dérivée en 0 soit non nulle ($n \geq 1$).

On suppose que la fonction h est bornée dans C^1, strictement croissante, et satisfait

$$h(0) = 0,\ h(1) = 1 \text{ et } \exists\ \alpha,\ \beta\ \in\ \mathbb{R} \text{ tels que } 0 < \alpha \leq h' \leq \beta. \tag{9}$$

Le cas limite des hautes énergies d'activation ($f(u,v) = \frac{1}{\varepsilon^2} exp\left(\frac{u-1}{\varepsilon}\right)\chi(u)v$, $\varepsilon \to 0$) a été étudié par Zeldovitch [8] (1941), puis plus récemment par Glangetas et Roquejoffre [5]. Des non-linéarités plus générales ont été abordées par Giovangigli [4], où l'existence d'une solution est démontrée pour une vitesse c fixée (considérant le paramètre de pertes de chaleur λ comme une inconnue du problème), avec un nombre de Lewis $Le = 1$ ($Le = 1/\Lambda$). Ici, nous restons dans le cadre des articles de Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [2], en conservant c comme une inconnue du problème.

2. Résultats

Soient (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) les solutions du problème (4) sans pertes de chaleur (avec $\lambda = 0$), avec les conditions aux limites $u(-\infty) = 0$, $u(+\infty) = 1$, $v(-\infty) = 1$ et $v(+\infty) = 0$ (voir [2] pour l'existence de telles solutions).

Théorème 2.1 *1) Pour tout $\Lambda > 0$, et pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe deux solutions distinctes et non triviales (u_1, v_1, c_1) et (u_2, v_2, c_2) au problème (4-5), avec $c_1 < c_2$.*

2) Pour tout $\Lambda > 0$, $c_1 \to 0$ quand $\lambda \to 0$. De plus, si $\Lambda \leq 1$ et $g(y) = y$, (u_2, v_2, c_2) converge sur tout compact vers (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) quand $\lambda \to 0$. Le même résultat est vrai pour le terme de réaction plus général $f(x, y)$ dans le cas $\Lambda = 1$.

Dans le cas adiabatique, la solution (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) est unique pour $\Lambda \leq 1$ (Marion [6]). Inversement, il existe des exemples de non-unicité de (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) dans le cas $\Lambda > 1$ (Bonnet [3]). Le Théorème 2.1 prouve qu'il n'y a jamais unicité dans le cas non-adiabatique (pour de faibles valeurs du paramètre de pertes de chaleur λ).

Les résultats présentés dans le théorème suivant sont vrais pour toutes les solutions (u, v, c) du problème (4-5). Soit (u_s, c_s) l'unique solution (voir [2]) du problème adiabatique suivant

$$-\Lambda u_s'' + c_s u_s' = f(u_s, 1 - u_s), \text{ avec } u_s(-\infty) = 0, \; u_s(+\infty) = 1. \tag{10}$$

Théorème 2.2 *1) Si $\lambda > \dfrac{f(1,1)}{h(\theta)}$, le problème (4-5) n'a pas de solution.*

2) Si g est $K-$lipschitzienne et si (u, v, c) n'est pas triviale, alors $v(+\infty) > exp\left(-\dfrac{Kp(1)}{\lambda h(\theta)}\right)$.

3) Pour tout $\Lambda \geq 1$, $0 < c \leq c_s$, où (u_s, c_s) est la solution de (10).

4) Soient $\sigma_1 = \max\limits_{s \in (\theta, 1)} \dfrac{f(s, 1-s)}{s}$ et $\sigma_2 = \max\limits_{s \in [0,1]} f(1 - \min\{1, \Lambda\} s, s)$, alors $0 < c < 2\sqrt{\sigma_1 \Lambda}$ pour tout $\Lambda \geq 1$ et $0 < c < \sqrt{\dfrac{\sigma_2}{\theta}}$ pour tout $\Lambda > 0$.

Le 1) est un résultat de non-existence, généralisant celui de [4] au cas $\Lambda \neq 1$.

Le deuxième résultat, qui est obtenu à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, donne une borne inférieure pour les gaz non brûlés. Il prouve ainsi que la réaction n'est jamais totale.

Le troisième résultat et la première estimation du 4) sont semblables à certains résultats de [2] obtenus dans le cas adiabatique. Ici, la fonction u n'étant plus croissante, les mêmes méthodes ne peuvent pas s'appliquer directement. Nous contournons cette difficulté en faisant l'analogie entre la fonction u du cas adiabatique et la fonction $1 - v$ dans le cas avec pertes de chaleur, et en introduisant la fonction $j(y) = -v' \circ v^{-1}(1 - y)$.

Notons que la deuxième estimation du 4) s'obtient très facilement par un principe du maximum.

3. Éléments de preuve du Théorème 2.1

La non-linéarité du type "ignition" permet de nous ramener à l'étude du système (4) sur $\mathbb{R}_+$ (cf. [2], [4]), avec les conditions aux limites $u(0) = \theta$, $u'(0) = cu(0) + k(\theta, c, \lambda)$, $\Lambda v'(0) = c(v(0) - 1)$, $u(+\infty) = 0$, et $v'(+\infty) = 0$, où $k(\theta, c, \lambda) = \lambda \int_{-\infty}^0 h(u_-)$, et u_- est l'unique solution de $-u_-'' + cu_-' + \lambda h(u_-) = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ avec $u_-(-\infty) = 0$, et $u_-(0) = \theta$ (cf. [4]).

Afin d'utiliser comme dans [2], [4] et [6] un argument de degré topologique de Leray-Schauder (voir [7] pour la définition), nous commençons par étudier le système (4) sur un domaine borné $I_a =]0, a[$. Soit $X_a = C^1(I_a, [0,1]) \times C^1(I_a, [0,1]) \times \mathbb{R}$, l'espace de Banach muni de la norme suivante : $\|(u, v, c)\|_{X_a} = \|u\|_{C^1(I_a)} + \|v\|_{C^1(I_a)} + |c|$.

Considérons l'application $J_\tau : X_a \longrightarrow X_a,\ (u, v, c) \mapsto (U, V, u(0) + c - \theta)$, où (U, V) est l'unique solution du problème linéaire

$$\left\{\begin{aligned} -U'' + cU' &= \tau[f(u,v) - \lambda h(u)] + (1-\tau)(v - \lambda u) \\ -\Lambda_\tau V'' + cV' &= -\tau f(u,v) - (1-\tau)v \end{aligned}\right. \quad \text{sur } I_a, \tag{11}$$

avec les conditions aux limites $U'(0) = cU(0) + \tau k(\theta, c, \lambda)$, $\Lambda_\tau V'(0) = cV(0) - c$, $U(a) = 0$ et $V(a) = 0$. On a posé $\Lambda_\tau = \tau\Lambda + (1-\tau)$.

Soit (u_τ, v_τ, c_τ) un point fixe de J_τ, avec $\tau \in [0,1]$ et $c_\tau \geq 0$. Nous avons les estimations *a priori* classiques ([2], [4], [6]) :

Proposition 3.1 *Nécessairement,* (u_τ, v_τ, c_τ) *vérifie* $0 < u_\tau < 1$, $0 < v_\tau < 1$, $-c_\tau < u'_\tau < c_\tau \left(1 + \dfrac{1}{\Lambda_\tau}\right)$, $-\dfrac{c_\tau}{\Lambda_\tau} < v'_\tau < 0$, *et* $0 < c_\tau \leq \sqrt{\dfrac{f(1,1)+1}{\theta}}$.

Pour obtenir un degré topologique non nul, une nouvelle estimation *a priori* est nécessaire :

Proposition 3.2 *Il existe* $c^* > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\lambda_1 > 0$ *et* $a_1 > 0$ *tels que pour tout* $a > a_1$, *et pour tout* $\tau \in [0,1]$, $(\lambda < \lambda_1) \Longrightarrow (c_\tau \notin (\varepsilon, c_* - \varepsilon))$.

Nous prouvons cette dernière proposition grâce à une succession de lemmes techniques qui nous permettent de surmonter la difficulté provenant de la non-unicité des solutions avec $\lambda = 0$ pour certaines valeurs de Λ. La preuve fait intervenir l'hypotèse (8).

Pour le cas particulier $\tau = 0$, nous avons

Lemme 3.3 *Pour* λ *assez petit et* a *assez grand,* J_0 *admet exactement deux points fixes* (u^1, v^1, c^1) *et* (u^2, v^2, c^2). *De plus, il existe* $c_\theta > 0$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\lambda_2 > 0$ *et* $a_2 > 0$, *tels que pour tout* $\lambda < \lambda_2$ *et pour tout* $a > a_2$, $0 < c^1 < \varepsilon$ *et* $c^2 > c_\theta$.

Posons $K_\tau \equiv I - J_\tau$, où I est l'identité de X_a. La proposition 3.1 garantit l'existence d'un ouvert Ω de X_a tel que pour tout $\tau \in [0,1]$, $0 \notin K_\tau(\partial\Omega)$.

Posons $\varepsilon := \min\left\{\dfrac{c_*}{8}, c_\theta\right\}$, $a_* := \max\{a_1, a_2\}$, $\lambda_* := \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Omega_1^a := \Omega \cap \{(u,v,c) \in X_a \text{ tq } c < 2\varepsilon\}$, et $\Omega_2^a := \Omega \cap \{(u,v,c) \in X_a \text{ tq } c > c_* - 2\varepsilon\}$.

De la Proposition 3.2, on déduit

Proposition 3.4 *Pour tout* $\lambda < \lambda_*$, *pour tout* $\tau \in [0,1]$ *et pour tout* $a \geq a_*$, $0 \notin K_\tau(\partial\Omega_i^a)$, *pour* $i = 1, 2$.

Ce résultat nous permet de définir le degré topologique de Leray-Schauder $deg(K_\tau, O_i^a, 0)$, pour $i = 1, 2$. Calculons sa valeur :

Proposition 3.5 *Soit* $\lambda < \lambda_*$ *et* $a \geq a_*$ *; pour* $i = 1, 2$, *et pour tout* $\tau \in [0,1]$, *on a* $deg(K_\tau, O_1^a, 0) = deg(K_0, O_1^a, 0) = 1$ *et* $deg(K_\tau, O_2^a, 0) = deg(K_0, O_2^a, 0) = -1$.

Cette dernière proposition se déduit du Lemme 3.3, grâce à l'invariance par homotopie et la propriété multiplicative du degré topologique (qui sont vraies car K_τ est compacte et uniformément continue par rapport à τ).

On en déduit l'existence de deux solutions sur I_a, l'une ayant une vitesse c proche de 0, et l'autre une vitesse $c > \frac{3}{4}c^*$. Le résultat 1) du théorème 2.1 s'obtient par passage à la limite $a \to +\infty$. La partie 2) du théorème 2.1 se déduit alors des résultats d'unicité de [6].

Remerciements

Je tiens à remercier les Professeurs Henri Berestycki et François Hamel pour les discussions fructueuses que nous avons eues sur ce problème.

Références

[1] A. Aftalion, & H. Berestycki, Mathematical model of stagnation point flames. Preprint LMENS-98-25 (1998).

[2] H. Berestycki, B. Nicolaenko, & B. Scheurer, Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits. *SIAM J. Math. Anal.* **16**, (1985) 1207-1242.

[3] A. Bonnet, Non-uniqueness for flame propagation when Lewis number is less than 1. *Euro. Jnl of Applied Mathematics* **6**, (1995) 287-306.

[4] V. Giovangigli, Nonadiabatic plane laminar flames and their singular limits. *SIAM J. Math. Anal.* **21** (5), (1990) 1305-1325.

[5] L. Glangetas, & J.M. Roquejoffre, Rigorous derivation of the dispersion relation in a combustion model with heat losses. Preprint Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique R95032 (1995).

[6] M. Marion, Qualitative properties of a nonlinear system for laminar flames without ignition temperature. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **9** (11), (1985) 1269-1292.

[7] P.H. Rabinowitz, Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.* **23**, (1974) 729-754.

[8] Ya. B. Zel'dovich, A theory of the limit of slow flame propagation. *Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* **11** (1), (1941) 159-169 (Russian).